

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x , gdy: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Do wykresu funkcji należy punkt } (1; 0).$$

Punkt leży na osi y , gdy: $x = 0$. Liczba 0 nie należy do dziedziny, a zatem nie ma punktów na osi y .

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} - \frac{1}{(-x)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \text{ czyli } f(-x) \neq f(x). \text{ Funkcja nie jest parzysta.}$$

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ czyli } f(-x) \neq -f(x). \text{ Funkcja nie jest nieparzysta.}$$

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = -\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x = 0$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Funkcja ma asymptotę poziomą: $y = 0$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w nieskończoności równa a jest różna od zera i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{x-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{(x-1)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{1}{3x^2} = 0$$

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ $a = 0$.

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)' = (x^{-1} - x^{-2})' = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\frac{-x+2}{x^3} > 0$$

$$(-x+2 > 0 \quad \wedge \quad x > 0)$$

$$(x < 2 \quad \wedge \quad x > 0)$$

✓

✓

$$(-x+2 < 0 \quad \wedge \quad x < 0)$$

$$(x > 2 \quad \wedge \quad x < 0)$$

sprzeczność

⇓

$x \in (0; 2) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.





Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+2}{x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Funkcja ma ekstremum w punkcie $(2; \frac{1}{4})$

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$...	0	...	1	...	2	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	#	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	0	 $-\infty$	#	$-\infty$ 	0		$\frac{1}{4}$		0

