Granice funkcji jednej zmiennej

Przypomnienie:

Zmienna y jest funkcją zmiennej x, jeżeli każdej z dopuszczalnych wartości x odpowiada dokładnie jedna wartość zmiennej y.

Dla skrócenia zapisu stosujemy symboliczne oznaczenia funkcji, np. $y = f(x)$, $s = F(t)$ itd.

Jeżeli $f(x) = 2x + 3$ to dla $x = 4$ wartość tej funkcji jest równa: $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje:

1) potęgową $y = x^n$

2) wykładniczą $y = a^x$

3) logarytmiczną $y = \log_a x$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$

4) trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$

5) cyklometryczne $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$

Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje, które można wyrazić jednym wzorem, w których występuje skończona ilość działań arytmetycznych i skończona ilość operacji oznaczanych przez symbole podstawowych funkcji elementarnych.

Wszystkie pozostałe funkcje nazywamy ***nie elementarnymi***.

Przykłady:

Funkcja $y = \begin{cases} x^3 \, dla \; x \leq 0 \\ x + 2 \; dla \; x > 0 \end{cases}$ nie jest funkcją elementarną.

Funkcja $y = 5x \sin x$ jest funkcją elementarną.

Funkcję $f(x)$ o własności $f(x) = f(-x)$ nazywamy funkcją parzystą, np. $y = x^2$, bo $x^2 = (-x)^2$

Funkcja jest nieparzysta, jeżeli $f(x) = -f(-x)$, np. $y = x^3$, bo $x^3 = -(-x)^3$

Funkcje: a^x czy $\sqrt{x}$ nie są parzyste ani nieparzyste.

Pierwiastkami (albo miejscami zerowymi) funkcji nazywamy takie wartości argumentu, dla których funkcja przyjmuje wartość zero. Pierwiastki funkcji $f(x)$ znajdujemy, przyrównując funkcję do zera i rozwiązując równanie $f(x) = 0$.

Aby znaleźć miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + 10x + 9$ rozwiązujemy równanie: $x^2 + 10x + 9 = 0$. Liczby: $x_1 = -9$, $x_2 = -1$ są rozwiązaniami tego równania, czyli miejscami zerowymi funkcji.

Dziedziną funkcji nazywamy zbiór tych wszystkich jej argumentów, dla których funkcja ma określoną wartość. Dziedziny podstawowych funkcji elementarnych:

Funkcja potęgowa $y = x^n$ o wykładniku wymiernym dodatnim $n = \dfrac{\alpha}{\beta}$ dla nieparzystych β jest określona na całej osi liczbowej, natomiast dla parzystych β jest określona dla $x \geq 0$

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ $(a > 0)$ jest określona na całej osi liczbowej.

Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x \, (a > 0)$ jest określona dla $x > 0$

Funkcje trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$ są określone na całej osi liczbowej. Funkcja $y = tgx$ jest określona na całej osi z wyjątkiem punktów: $x_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k=…-2, -1, 0, 1, 2. …). Funkcja $y = ctgx$ jest określona na całej osi z wyjątkiem punktów: $x_k = k\pi$.

Funkcje kołowe (odwrotne do trygonometrycznych $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ są określone dla $-1 \leq x \leq 1$, a $y = arctgx$, $y = arcctgx$ są określone na całej osi liczbowej.

Przy wyznaczaniu dziedziny funkcji elementarnej należy zwrócić uwagę na:
1) Pierwiastki stopnia parzystego; funkcja będzie określona tylko dla takich wartości argumentu x, dla których wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne.
2) Na mianowniki wyrażeń ułamkowych. Funkcja będzie określona dla tych wartości x, dla których mianowniki są różne od zera.

Definicje:

1) Liczbę a nazywamy granicą zmiennej x, jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka wartość x_0 zmiennej x poczynając, od której dla wszystkich następnych wartości zmiennej bezwzględna wartość różnicy $|a-x|$ jest mniejsza od ε.
2) Zmienną a nazywamy nieskończenie małą, jeżeli dla każdej, dodatniej liczby ε istnieje taka wartość a_0 zmiennej a, poczynając, od której wszystkie następne wartości zmiennej są, co do wartości bezwzględnej mniejsze od ε.
3) Zmienną z nazywamy nieskończenie dużą, jeżeli dla każdej dodatniej liczby N istnieje taka wartość z_0 zmiennej z poczynając, od której wszystkie następne wartości zmiennej są, co do wartości bezwzględnej większe od N.

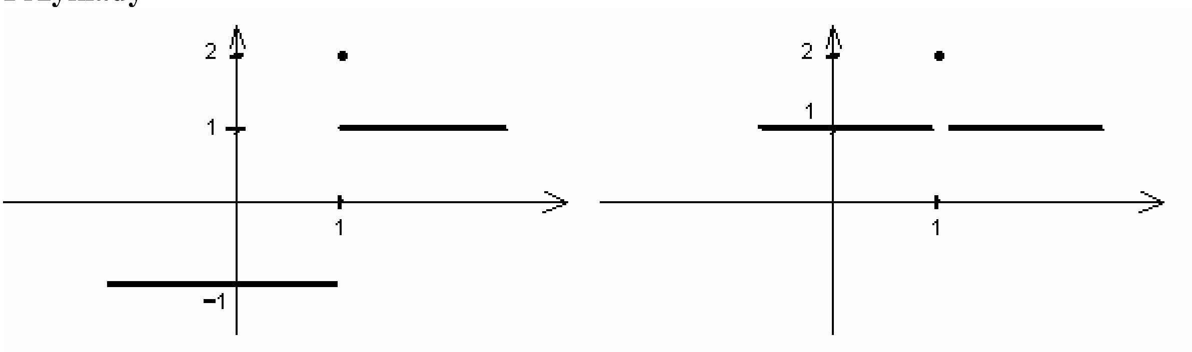
Jeżeli a jest granicą zmiennej x, to mówimy, że x dąży do a i piszemy $\lim x = a$ lub $x \to a$
Wielkość nieskończenie wielka nie ma granicy, dla skrócenia zapisu mówimy umownie, że z dąży do nieskończoności. i piszemy: $z \to \infty$ lub $\lim z = \infty$
z definicji granicy wielkości zmiennej oraz z definicji wielkości nieskończenie małych i nieskończenie wielkich wynika, że:
1) granicą nieskończenie małej wielkości jest zero (a więc jeśli a jest wielkością nieskończenie małą to $\lim a = 0$)
2) różnica zmiennej i jej granicy jest wielkością nieskończenie małą(a więc jeśli $\lim x = a$, to $x - a = 0$)
3) odwrotność wielkości nieskończenie dużej jest wielkością nieskończenie małą (a więc jeśli $z \to \infty$ to $\frac{1}{z} \to 0$)
4) odwrotność wielkości nieskończenie małej jest wielkością nieskończenie dużą (a więc jeżeli $a \to 0, to \frac{1}{a} \to \infty$)

Definicja.
Jeżeli $f(x) \to b$, gdy $x \to a$ (nie przybierając wartości a), to liczbę b nazywamy granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a.

Granicę funkcji można też określić bez odwoływania się do pojęcia granicy zmiennej..
Definicja
Liczba b nazywa się granicą funkcji $f(x)$ dla $x \to a$ jeżeli dla każdej liczby ε>0 można dobrać taką liczbę δ>0, że $|f(x)-b|$ będzie mniejsze od ε gdy $|x-a|$ dla $x \neq a$ będzie mniejsze od δ.
Jeżeli liczba b jest granicą funkcji $f(x)$ dla x dążących do a, to piszemy:
$\lim_{x \to a} f(x) = b$, gdy x dąży do a w dowolny sposób.
$\lim_{x \to a-0} f(x) = b$, gdy x dąży do a z lewej strony, czyli tak, że x jest stale mniejsze od a;
$\lim_{x \to a+0} f(x) = b$, gdy x dąży do a z prawej strony, czyli tak, że x jest stale większe od a;

Jeśli istnieje granica funkcji, gdy $x \to a$ w dowolny sposób, to również istnieją i mają taką samą wartość granice jednostronne tej funkcji, gdy $x \to a$ tylko z lewej strony lub tylko z prawej strony, a więc:
Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, to $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$
Natomiast, jeżeli granice jednostronne są różne lub jedna z nich nie istnieje, to granica funkcji dla $x \to a$ nie istnieje.

Przykłady



RYS 1) Niech funkcja $f(x)$ ma wartość 2 dla $x = 1$, dla $x > 1$ wartości funkcji są równe 1, dla $x < 1$ wartości funkcji są równe -1.
Funkcja $f(x)$ nie ma granicy w punkcie 1, ponieważ granica prawostronna i lewostronna funkcji są różne.
$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -1 \quad \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 1$
RYS 2) Funkcja $f(x)$ ma wartość 2 dla argumentu $x = 1$, dla argumentów różnych od 1 wartości funkcji są równe 1.
Funkcja $f(x)$ ma granicę w punkcie $x = 1$, ponieważ granice lewostronna i prawostronna funkcji są sobie równe.
$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 1$, a zatem $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Ćwiczenie 1
Biorąc n=0,1,2,3... ułożyć tabelkę wartości zmiennej: $y = 1 + 0{,}1^n$ oraz określić zachowanie się tej zmiennej przy n rosnącym nieograniczenie, czyli dla $n \to \infty$.

n	0	1	2	3	4	5	$\dots$	$n \to \infty$
y	2	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	$\dots$	$y \to 1+0$

Wraz ze wzrostem n kolejne wartości zmiennej y dążą do jedności, zatem dla dostatecznie dużych wartość bezwzględna różnicy $|y-1|$ będzie mniejsza od dowolnie małej liczby dodatniej ε, co można udowodnić.
Dowód.
Niech będzie dana liczba $\varepsilon > 0$ .Można wykazać, że dla pewnych wartości n: |y-1|<ε
Ponieważ $|y-1| = 0{,}1^n$, więc wystarczy wykazać, że: $0{,}1^n < \varepsilon$ w tym celu logarytmujemy obie strony nierówności i rozwiązujemy nierówność.
$\lg 0{,}1^n < \lg\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n\lg 0{,}1 < \lg\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -1n < \lg\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > -\lg\varepsilon \Rightarrow \quad n > \lg\varepsilon^{-1} \Rightarrow$
$n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$, co oznacza, że $|y-1|$ będzie mniejsza od ε gdy tylko n będzie większe od $\lg\frac{1}{\varepsilon}$.
Wobec tego zgodnie z definicją (1), zmienna y ma granicę równą jedności: $\lim\limits_{n \to \infty} y = 1$

Ćwiczenie 2

Wykazać, że $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$

Rozwiązanie: Utwórzmy różnicę $\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}=\frac{2x+3-2x}{3x}=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$

Gdy $x\to\infty$ różnica ta jest wielkością nieskończenie małą(jako odwrotność wielkości nieskończenie wielkiej). Jeżeli zmienna $\frac{2x+3}{3x}$ różni się od stałej $\frac{2}{3}$ o wielkość nieskończenie małą, to stała ta jest granicą zmiennej.

Twierdzenia o nieskończenie małych i o granicach.

1. Suma skończonej ilości wielkości nieskończenie małych jest także wielkością nieskończenie małą.
2. Iloczyn wielkości nieskończenie małej i wielkości ograniczonej jest także wielkością nieskończenie małą.
3. Granica stałej jest równa wartości tej stałej.
4. Granica sumy skończonej liczby składników jest równa sumie ich granic.
   lim(u+v-w)=lim u+lim v-lim w
5. Granica iloczynu skończonej liczby czynników jest równa iloczynowi ich granic.
   $\lim(uvw)=\lim u\times\lim v\times\lim w$
6. Granica ilorazu jest równa ilorazowi granic dzielnej i dzielnika, jeśli granica dzielnika jest różna od zera. $\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v},\ \lim v\neq 0$

Przykład 1

Znaleźć granice funkcji

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(2x-3-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 1}2\times\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3-\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x}=2\times 1-3-\frac{1}{1}=-2$$

b)

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

Gdy $x\to 0$ argument $\frac{1}{x}\to\infty$ a czynnik $\sin\frac{1}{x}$ będzie przyjmował wartości od -1 do 1, nie dążąc do żadnej określonej granicy, czyli czynnik ten nie ma granicy, ale jest wielkością ograniczoną, bo $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$. Dlatego, zgodnie z twierdzeniem 2, dana funkcja, jako iloczyn wielkości nieskończenie małej x i ograniczonej wielkości $\sin\frac{1}{x}$, będzie wielkością nieskończenie małą i jej granica będzie równa zeru. $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

c)

Wyznaczyć granicę lewostronną i prawostronną funkcji $y=2^{\frac{1}{x}}$

Jeżeli zmienna x będzie zmierzać do zera z lewej strony poprzez ujemne wartości, czyli gdy x będzie nieskończenie małą wielkością ujemną, to $\frac{1}{x}$ będzie nieskończenie wielką wielkością ujemną, a $-\frac{1}{x}$ nieskończenie wielką wielkością dodatnią.

Po wstawieniu za liczbę $2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ otrzymamy $\lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$.

Jeżeli $x \to +0$ (z prawej strony) to $\frac{1}{x} \to +\infty$ i $\lim\limits_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$

Granice: lewostronna i prawostronna funkcji są różne, czyli funkcja nie ma granicy, gdy $x \to 0$.

Uwaga: W programie omega, po narysowaniu wykresu tej funkcji i naciśnięciu klawisza ustawiamy x=0, a następnie po wybraniu opcji: gp (granica prawostronna) lub gl (granica lewostronna) i ponownym naciśnięciu klawisza znajdziemy potwierdzenie powyższego rozumowania.

Obliczanie granic

Granica funkcji w danym punkcie nie zależy od tego, czy funkcja jest określona w tym punkcie czy też nie.

a) Jeżeli rozpatrywana funkcja jest funkcją elementarną i jeżeli wartość graniczna argumentu należy do dziedziny funkcji, to obliczanie granicy sprowadza się do podstawienia wartości granicznej argumentu, czyli $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

b) Jeżeli argument dąży do nieskończoności lub do liczby nie należącej do dziedziny funkcji, to w każdym z tych przypadków poszukiwanie granicy wymaga specjalnego badania.

Warto też wykorzystywać twierdzenia dotyczące najczęściej występujących granic przy obliczaniu innych granic i odgrywają one rolę wzorów, które warto pamiętać.

Te podstawowe twierdzenia, to:

(stała a jest wszędzie dodatnia)

$$\lim_{x\to\infty} ax = \infty \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{a} = \infty \quad \lim_{x\to -0} \frac{a}{x} = -\infty \quad \lim_{x\to +0} \frac{a}{x} = +\infty \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ gdy } |a| < 1 \\ +\infty \text{ gdy } a > 1 \\ \infty \text{ gdy } a < -1 \ ^{1)} \end{cases}$$

[1)] Gdy a<0 zmienna x może przyjmować tylko wartości całkowite.

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ gdy } |a| > 1 \\ +\infty \text{ gdy } 0 < a < 1 \\ \infty \text{ gdy -1} < a < 0 \ ^{1)} \end{cases}$$

[1)] Gdy a<0 zmienna x może przyjmować tylko wartości całkowite.

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ gdy } a > 1 \\ +\infty \text{ gdy } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ gdy } a > 1 \\ +\infty \text{ gdy } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2{,}71828$$

Bardziej złożone przypadki znajdowania granic funkcji to takie, gdy funkcja jest typu:

1) $\frac{0}{0}$, 2) $\frac{\infty}{\infty}$, 3) $0 \times \infty$, 4) $\infty - \infty$, 5) 1^{∞}

Przystępując do wyznaczenia granicy funkcji należy najpierw sprawdzić, jakiego typu jest to funkcja w tym celu podstawiamy w miejsce argumentu wartość, do której ten argument ma zmierzać.

Ad 1)

W przypadku tym przekształcamy wyrażenie tak, aby ułamek można było skrócić przez czynnik dążący do zera.

Przykład 1

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^4+x-5}{x^3+3x-1}=-\frac{3}{5}$$ (dzielimy licznik i mianownik przez x+2)

Ogólnie, jeżeli wyznaczamy granicę ułamka, którego licznik i mianownik są wielomianami, wielomianami miejscach zerowych w punkcie granicznym x=a, to na podstawie twierdzenia Bezouta wiemy, że wielomiany te dzielą się bez reszty przez x-a.

Przykład 3

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}$$

(rozkładamy licznik i mianownik na czynniki i skracamy ułamek przez $1+\cos x$)

Przykład 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

(usuwamy niewymierność w liczniku mnożąc licznik i mianownik przez $1+\sqrt{x+1}$, a następnie dzielimy licznik i mianownik ułamka przez x)

Przykład 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx\left(1+\sqrt{1+tgx}\right)}{1-1-tgx}=-\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1+tgx}\right)=-2$$

(mnożymy licznik i mianownik przez $1+\sqrt{1+tgx}$, a następnie skracamy ułamek przez czynnik tgx)

Przykład 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$$

(przekształcamy funkcję tak, aby móc skorzystać z jednej z podstawowych granic, mianowicie: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$)

Przykład 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\times 1=2$$

(korzystamy ze wzoru trygonometrycznego $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$)

Przykład 8

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{arctg(x+2)}=\lim_{v\to 0}\frac{(tgv-2)^2-4}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{(tgv-4)tgv}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{tgv-4}{\cos v}\times\lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}=-4\times 1=-4$$

(podstawiając $arctg(x+2)=v$ otrzymamy $x+2=tgv$, przy czym: gdy $x\to -2$, to $v\to 0$)

Ad 2)

Przykład 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{5-0}=\frac{3}{5}$$

(Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez x^2 czyli przez najwyższą z występujących potęg x)

Zadanie to można także rozwiązać inaczej, za pomocą zamiany zmiennej. Podstawiając mianowicie $x=\frac{1}{\alpha}$ otrzymamy: $\alpha\to 0$, gdy $x\to\infty$, zatem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{3}{\alpha^2}-1}{\frac{5}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3-\alpha^2}{5+2\alpha}=\frac{3}{5}$$

Ogólnie, przejście graniczne dla $x\to\infty$ można zawsze sprowadzić do przejścia granicznego dla $\alpha\to 0$ jeśli za nową zmienną przyjmie się odwrotność zmiennej wyjściowej, czyli $\alpha=\frac{1}{x}$.

Przykład 2

$$\lim_{n\to -\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to -\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{-1}=-1$$ (dzielimy licznik i mianownik przez n)

Przykład 3

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}=\lim_{n\to +\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}\times n}{\frac{1+2n+1}{2}(n+1)}=\lim_{n\to +\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

(Licznik jest tu sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego, mianownik sumą n+1 wyrazów innego ciągu arytmetycznego. Należy zsumować oba wyrażenia według znanego wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.)

Ad 3)

Ten przypadek wyznaczania granicy funkcji typu $0 \times \infty$, można sprowadzić do przypadku $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$

Przykład 1

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 1\times\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}\times 1 = \frac{2}{\pi}$$

(Wyrażenie przekształcamy na ułamek w którym licznik i mianownik dążą do zera)

Przykład 2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos ec\left(\frac{3}{4}\pi+x\right) = \lim_{t\to 0} t\cos ec(\pi-t) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

(Podstawiamy: $\frac{\pi}{4}-x=t$)

Przykład 3

$$\lim_{x\to+\infty} xarctgx = \lim_{\alpha\to+0}\alpha\, ctg\alpha = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin a} = \lim_{\alpha\to+0}\cos\alpha\times\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

(Podstawiamy $arctgx=\alpha$ i otrzymujemy $x=ctg\alpha$, przy czym $\alpha\to+0$ gdy $x\to+\infty$)

Ad 4)

Ten przypadek wyznaczania granicy funkcji typu $\infty-\infty$, można sprowadzić do przypadku: $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład 1

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

(Odejmujemy ułamki i otrzymany ułamek skracamy przez x-2.)

Przykład 2

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}} = -\frac{5}{2}$$

(Rozpatrujemy funkcję jako ułamek o mianowniku 1, pozbywamy się niewymierności w liczniku, a następnie dzielimy licznik i mianownik ułamka przez x.)

Ad 5)
W tym przypadku w celu znalezienia granicy korzystamy z następującej granicy podstawowej

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

(Logarytm o podstawie e nazywa się logarytmem naturalnym i oznaczamy przez ln.
Logarytmy naturalne i dziesiętne są związane wzorami: $\lg x = \lg e \ln x$ oraz $\ln x = \dfrac{\lg x}{\lg e}$)

Przykład 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = \left[\lim_{\frac{n}{a}\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = e^a$$

lub inaczej, podstawiając $n = ax$, mamy $x\to\infty$ gdy $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a = e^a$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-2} = e^{-2}$$

(Podstawiając: $-2x=\alpha$ mamy $\alpha\to 0$ gdy $x\to 0$)

Reguła de l'Hospitala i jej zastosowanie przy obliczaniu granic funkcji.

Skutecznym środkiem wyznaczania granicy funkcji w przypadkach, gdy jest ona typu: $\dfrac{0}{0}$ (ilorazem dwóch wielkości nieskończenie małych) lub typu $\dfrac{\infty}{\infty}$ (ilorazem dwóch wielkości nieskończenie dużych) jest reguła de l'Hospitala, która mówi: Granica stosunku dwu wielkości nieskończenie małych lub nieskończenie wielkich wielkości jest równa granicy stosunku pochodnych tych wielkości, pod warunkiem, że ostatnia granica istnieje lub zmierza do nieskończoności.

a)

Gdy okaże się, że iloraz pochodnych jest też wyrażeniem typu $\dfrac{0}{0}$ lub $\dfrac{\infty}{\infty}$, to regułę de l'Hospitala można stosować ponownie, a nawet wielokrotnie (jeśli jest to celowe).

Przykład 1

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16} = \lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x-6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n}a^{m-n}$$

(Po stwierdzeniu, że są to przypadki ilorazów typu: $\dfrac{0}{0}$ stosujemy regułę de l'Hospitala)

Przykład 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}$$

(Po stwierdzeniu, że jest to przypadek ilorazu typu: $\frac{0}{0}$ stosujemy regułę de l'Hospitala dwukrotnie)

Czasami stosowanie reguły de l'Hospitala nie prowadzi do celu.

Przykład 4

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec x tgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{tgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\sec x}$$

(Granicę wyznaczamy za pomocą elementarnego przekształcenia)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

Przykład 5

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\infty}tg^2\frac{x}{2}$ (Stosowanie reguły de l'Hospitala nie prowadzi do wyniku, ponieważ granica nie istnieje. Szukaną granicę można wyznaczyć w sposób elementarny)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1,\ \text{gdyż } |\sin x|\le 1$$

b)

Kiedy funkcja jest typu $0\times\infty$ lub $\infty-\infty$ przekształcamy funkcję do postaci ułamka i wyznaczanie granicy sprowadzamy do przypadku: $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład 1

$$\lim_{x\to 0}xctg2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt[3]{x}\ln x\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}=-3\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0$$

(Po sprowadzeniu do przypadku $\frac{0}{0}$ stosujemy regułę de l'Hospitala)

Przykład 3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

(Po sprowadzeniu do przypadku $\frac{0}{0}$ stosujemy regułę de l'Hospitala dwukrotnie.

c) Przypadki funkcji typu: 1^{∞}, ∞^0, 0^0 także sprowadzamy do przypadków: $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ w następujący sposób: Daną funkcję logarytmujemy i znajdujemy granicę jej logarytmu, a następnie, gdy znamy granicę logarytmu funkcji, wyznaczamy granicę samej funkcji.

Przykład 1

$a = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$ Stwierdziwszy, że zachodzi przypadek 1^{∞}, logarytmujemy funkcję i szukamy granicy jej logarytmu. $a = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$

$\ln a = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \ln(tgx)^{tg2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} tg2x \times \ln tgx = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln tgx}{ctg2x}$ (sprowadziliśmy poszukiwanie granicy do przypadku $\frac{0}{0}$, a następnie stosując regułę de l'Hospitala, otrzymamy:

$\ln a = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sec^2 x}{tgx} : (-2\cos ec^2 2x) \right] = -1$ Znając granicę logarytmu funkcji, znajdujemy granicę funkcji $a = e^{-1}$

Przykład 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ Po ustaleniu, że zachodzi przypadek ∞^0, obliczamy granicę logarytmu funkcji.

$a = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ $\ln a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$ Otrzymaliśmy przypadek $\frac{\infty}{\infty}$ więc stosujemy regułę de l'Hospitala $\ln a = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x \ln x} : 1 \right) = 0$ skąd wynika, że poszukiwana granica $a = e^0 = 1$

Przykład 3

$\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$ Stwierdziwszy, że zachodzi przypadek 0^0, wyznaczamy granice:

$a = \lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$ $\ln a = \lim\limits_{x \to +0} \frac{6 \ln x}{1 + 2\ln x}$ i otrzymaliśmy przypadek $\frac{\infty}{\infty}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala $\ln a = 6 \lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x} : \frac{2}{x} \right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ a więc poszukiwana granica wynosi $a = e^3$.