BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x^2-1\neq 0 \quad \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow \; x\neq 1 \wedge x\neq -1 \Rightarrow \qquad$ D=$(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x, gdy: $f(x)=0$

$\frac{1}{x^2-1}\neq 0$ dla każdego x $\Rightarrow$Brak punktów na osi x.

Punkt leży na osi y, gdy: $x=0$.

$f(0)=\frac{1}{0^2-1}=-1 \quad \Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (0 ; -1)

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x)\;=\;f(x)$

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$, czyli $f(-x)=f(x)$. Funkcja jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x)=-f(x)$

$-f(x)=-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{-1}{x^2-1}$, czyli $f(-x)\neq -f(x)$. Funkcja nie jest nieparzysta.

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=+\infty$$

Funkcja ma asymptoty pionowe: $x=1$ i $x=-1$

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y=a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0$$

Funkcja ma asymptotę poziomą: $y=0$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y=ax+b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w nieskończoności równa a jest różna od zera i

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b \quad \vee \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{(x^2-1)}\frac{1}{x}=0$$

Funkcja $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ $a=0$.

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)' = \frac{0\cdot(x^2-1)-1\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$\frac{-2x}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq -1 \qquad \frac{-2x}{(x^2-1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Downarrow$$

$x \in (-\infty\,;-1) \cup (-1\,;0) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (0\,;1) \cup (1\,;+\infty) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0\,;y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{0^2-1}\right) = -1$$

Funkcja ma ekstremum w punkcie (0 ; -1)

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	#	+	0	-	#	-	-
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	#	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow -\infty$	#	$+\infty \searrow$	0