

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$$x \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x , gdy: $f(x) = 0$

$$x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 0$$

Ponieważ $x^2 + 1 > 0$ dla każdej liczby $x \neq 0$, więc punkty położone na osi x nie istnieją.

Punkt leży na osi y , gdy: $x = 0$. Liczba 0 nie należy do dziedziny, a zatem nie ma punktów na osi y .

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x}, \text{ czyli } f(-x) \neq f(x). \text{ Funkcja nie jest parzysta.}$$

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -x - \frac{1}{x}, \text{ czyli: } f(-x) = -f(x). \text{ Funkcja jest nieparzysta.}$$

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x = 0$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

Funkcja nie ma asymptoty poziomej.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w

nieskończoności równa a jest różna od zera i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Czyli: $a = 1$, $b = 0$.

Funkcja $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ma asymptotę ukośną: $y = x$

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x + x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$1 - \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$$

$$x^2 - 1 > 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

\Downarrow

$$x^2 > 1$$

\Updownarrow

$$x < -1 \vee x > 1$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow \text{funkcja jest rosnąca.}$$

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \Rightarrow \text{funkcja jest malejąca.}$$

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2 \quad f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Funkcja ma ekstrema lokalne w punktach: $(-1; -2)$ i $(1; 2)$

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	#	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	#	$+\infty \searrow$	2	\nearrow	$+\infty$

