BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x \neq 0$

D=$\Re \setminus \{0\} = \left(-\infty ; 0\right) \cup (0 ; +\infty)$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x, gdy: $f(x) = 0$

$x^2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (-1 ; 0).

Punkt leży na osi y, gdy: $x = 0$.

Liczba 0 nie należy do dziedziny, a zatem nie ma punktów na osi y.

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$f(-x) = \left(-x\right)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x}$, czyli $f(-x) \neq f(x)$. Funkcja nie jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = -x^2 - \frac{1}{x}$, czyli: $f(-x) \neq -f(x)$. Funkcja nie jest nieparzysta.

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty - 0 = \infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x = 0$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty - 0 = \infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

Funkcja nie ma asymptoty poziomej..

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w nieskończoności równa a jest różna od zera i

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b \quad \vee \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$$

Funkcja $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ liczba a nie istnieje.

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = (x^2 + x^{-1})' = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$2x - \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\frac{2x^3 - 1}{x^2} > 0$$

$$2x^3 - 1 > 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x^3 > 1 \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}8$$

$x \in (\sqrt[3]{0{,}5}\,; +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (-\infty;0) \cup (0;\sqrt[3]{0{,}5}) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$2x - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}8$$

$$f(0{,}8) = 0{,}8^2 + \tfrac{1}{0{,}8} \approx 0{,}64 + 1{,}25 \approx 1{,}9$$

Funkcja ma ekstremum w punkcie (0,8 ;1,9)

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	0,8	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	#	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘ $-\infty$	#	$+\infty$ ↘	1,9	↗	$+\infty$