BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x-2\neq 0 \iff x\neq 2$

D=$\Re\setminus\{2\}=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x, gdy: $f(x)=0$

$\frac{x+1}{x-2}=0\iff x+1=0\iff x=-1\Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (-1;0).

Punkt leży na osi y, gdy: $x=0$.

$f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}\;\Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (0 ; -0,5).

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x)\;=\;f(x)$

$f(-x)=\frac{-x+1}{-x-2}$, czyli $f(-x)\;\neq\;f(x)$. Funkcja nie jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x)=-f(x)$

$-f(x)=-\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{-x-1}{x-2}$, czyli $f(-x)\;\neq\;-f(x)$. Funkcja nie jest nieparzysta.

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=+\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x=2$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y=a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1$$

Funkcja ma asymptotę poziomą; $y=1$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y=ax+b$, gdy granica funkcji $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ i $a\neq 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{(x-2)x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)'}{(x^2-2x)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2x-2}\right)=0$$

Funkcja $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ liczba $a=0$

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

Ponieważ dla każdego $x \neq 2$ prawdziwa jest nierówność: $-\frac{3}{(x-2)^2} < 0$,

stąd wniosek, że:

$x \in (-\infty\,; 2) \cup (2\,; +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

Równość $-\frac{3}{(x-2)^2} = 0$ dla każdego $x \neq 2$ jest fałszywa,

stąd wniosek, że funkcja nie ma ekstremum.

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	2	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	-	-	#	+	+
$f(x)$	1	↘	0	↘	-0,5	↘ $-\infty$	#	$+\infty$ ↘	1